Chapitre 21 : Comparaison des suites numériques

Proposition 20

Soit $a \in \mathbb{R}$. Alors $a^n = o(n!)$.

Démonstration. Soit $a \in \mathbb{R}$. Par propriété archimédienne de $\mathbb{R}$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $n_0 > |a|$. Ainsi, pour tout $k \geqslant n_0$, on a $\dfrac{|a|}{k} \leqslant \dfrac{|a|}{n_0} < 1$. Soit $n \geqslant n_0$. On a :

$$\left|\frac{a^n}{n!}\right| = \frac{|a|^{n-n_0+1}|a|^{n_0-1}}{\left(\prod_{k=n_0}^{n} k\right)(n_0-1)!} = \left(\prod_{k=n_0}^{n} \frac{|a|}{k}\right)\frac{a^{n_0-1}}{(n_0-1)!} \leqslant \left(\frac{|a|}{n_0}\right)^{n-n_0+1} \cdot \frac{|a|^{n_0-1}}{(n_0-1)!},$$

où $0 \leqslant \dfrac{|a|}{n_0} < 1$. Or, la suite de terme général $\left(\dfrac{|a|}{n_0}\right)^{n-n_0+1} \cdot \dfrac{|a|^{n_0-1}}{(n_0-1)!}$ est une suite géométrique de raison $\dfrac{|a|}{n_0} \in [0\,;1[$, donc cette suite converge vers 0. On en déduit que la suite $\left(\dfrac{a^n}{n!}\right)_{n\geqslant 0}$ converge vers aussi 0, et ainsi $a^n = o(n!)$. $\square$