MPSI - Programme de colles - Semaine 24 (du 04/04/2022 au 08/04/2022)

1 Espaces vectoriels de dimension finie. Sous-espaces affines.

Tout le programme précédent sur les chapitres 24 et 25. Les **questions de cours** au programme sont les suivantes :

Caractérisation des familles finies libres et des familles finies génératrices par le rang de la famille (Chap 24, Propositions 16 et 17). **Caractérisation des couples de sous-espaces supplémentaires en dimension finie** (Chap 24, Proposition 26). **Forme géométrique du théorème du rang + Théorème du rang** (Chap 24, Théorèmes 35 et 36). **Caractérisation des isomorphismes en dimension finie** (Chap 24, Théorème 37).

2 Matrices et applications linéaires.

- Matrice d'une famille de vecteurs dans une base, d'une application linéaire dans un couple de bases, notation $\mathrm{Mat}_{\mathscr{E},\mathscr{F}}(u)$. Coordonnées de l'image d'un vecteur par une application linéaire.

  QC : L'application $u \mapsto \mathrm{Mat}_{\mathscr{E},\mathscr{F}}(u)$ est un isomorphisme (Chap 25, Théorème 5).

  QC : Coordonnées de l'image d'un vecteur par une application linéaire (Chap 26, Proposition 6).

  QC : Matrice d'une composée d'applications linéaires (Chap 26, Proposition 7).

- Matrice d'une composée d'applications linéaires. Lien entre matrices inversibles et isomorphismes.

  QC : Lien entre isomorphismes et matrices inversibles (Chap 26, Théorème 9).

- Application linéaire canoniquement associée à une matrice. Noyau, image et rang d'une matrice. Les colonnes engendrent l'image, les lignes donnent un système d'équations du noyau. Les opérations élémentaires sur les lignes conservent le noyau. Les opérations élémentaires sur les colonnes conservent l'image.

- Condition d'inversibilité d'une matrice triangulaire. L'inverse d'une matrice triangulaire inversible est une matrice triangulaire.

- Systèmes linéaires, représentation matricielle. Rang d'un système linéaire. Structure de l'ensemble des solutions. Systèmes de Cramer.

- Matrice de passage d'une base à une autre. La matrice de passage $P_{\mathscr{E}}^{\mathscr{E}'}$ de $\mathscr{E}$ à $\mathscr{E}'$ est la matrice de la famille $\mathscr{E}'$ dans la base $\mathscr{E}$. Effet d'un changement de base sur les coordonnées d'un vecteur, sur la matrice d'une application linéaire.

- Matrices équivalentes. Classification des matrices équivalentes par le rang. Invariance du rang par transposition. Rang d'une matrice extraite. Caractérisation du rang par les matrices carrées extraites.

  QC : Si $u \in \mathscr{L}(E,F)$ est de rang r, alors il existe une base $\mathscr{E}$ de E et une base $\mathscr{F}$ de F telles que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{E},\mathscr{F}}(u) = J_{n,p,r}$ (Chap 26, Proposition 45).

- Matrices semblables. Interprétation en termes d'endomorphisme. Invariance de la trace par similitude. Trace d'un endomorphisme en dimension finie. Trace d'un projecteur.

3 La semaine suivante

Révision de toute l'algèbre linéaire. Matrices et applications linéaires. Intégrales sur un segment.