MPSI - Programme de colles - Semaine 25 (du 25/04/2022 au 29/04/2022)

1 Révisions de MPSI

Un exercice, court, sur l'un au moins des chapitres suivants sera posé à chaque élève :

- Chapitre 10 : Calcul matriciel et systèmes linéaires.
- Chapitre 22 : Espaces vectoriels.
- Chapitre 23 : Applications linéaires.
- Chapitre 24 : Espaces vectoriels de dimension finie.
- Chapitre 25 : Sous-espaces affines.
- Chapitre 26 : Matrices et applications linéaires.

2 Matrices et applications linéaires.

Tout le programme précédent sur les chapitres 26. Les **questions de cours** au programme sont les suivantes :

L'application $u \mapsto \mathrm{Mat}_{\mathscr{E},\mathscr{F}}(u)$ est un isomorphisme (Chap 25, Théorème 5). **Coordonnées de l'image d'un vecteur par une application linéaire** (Chap 26, Proposition 6). **Matrice d'une composée d'applications linéaires** (Chap 26, Proposition 7). **Lien entre isomorphismes et matrices inversibles** (Chap 26, Théorème 9). **Si $u \in \mathscr{L}(E,F)$ est de rang r, alors il existe une base $\mathscr{E}$ de E et une base $\mathscr{F}$ de F telles que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{E},\mathscr{F}}(u) = J_{n,p,r}$** (Chap 26, Proposition 45).

3 Intégration sur un segment.

- Continuité uniforme. Théorème de Heine.
- Subdivision d'un segment. Fonction en escalier. Intégrale d'une fonction en escalier sur un segment.
- Fonction continue par morceaux sur un segment. Intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment. Valeur moyenne.
- Linéarité, positivité et croissance de l'intégrale. Inégalité triangulaire intégrale $\left|\int_{[a,b]} f\right| \leqslant \int_{[a,b]} |f|$. Relation de Chasles.

  QC : Soit $f : [a\,;b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et positive sur $[a\,;b]$. Si f n'est pas la fonction nulle sur $[a\,;b]$, alors $\int_{[a,b]} f > 0$ (Chap 27, Théorème 31).
- Extension de la notation $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ au cas où $b \leqslant a$. Propriétés correspondantes.
- Inégalité de Cauchy-Schwarz, cas d'égalité. Inégalité de Minkowski, cas d'égalité.

  QC : Inégalités de Cauchy-Schwarz et Minkowski (sans cas d'égalité) (Chap 27, Théorèmes 44 et 46).
- Sommes de Riemann. Interprétation géométriques.
- Extension des notions précédentes au cas des fonctions à valeurs complexes.

4 Intégration et dérivation.

- Intégrale fonction de sa borne supérieure. Dérivation de $x \mapsto \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ pour f continue. Calcul d'une intégrale au moyen d'une primitive. Toute fonction continue sur un intervalle possède des primitives.

  QC : Soient $f : I \to \mathbb{R}$ continue par morceaux, $x_0 \in I$ et $a \in I$. Si f est continue en x_0, alors $\Phi : x \mapsto \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ est dérivable en x_0 avec $\Phi'(x_0) = f(x_0)$. (Chap 28, Proposition 7).

- Intégration par parties, changement de variable.
- Primitives usuelles. Calcul de primitives par intégration par parties, changement de variables.
- Utilisation de la décomposition en éléments simples pour calculer les primitives d'une fraction rationnelle.
- Formule de Taylor avec reste intégral. Inégalité de Taylor-Lagrange *(l'égalité est hors-programme)*. Formule de Taylor-Young. Primitivation d'un développement limité.

  QC : Formule de Taylor avec reste intégral. (Chap 28, Théorème 17).
- Extension des notions au cas des fonctions définies sur un intervalle à valeurs complexes.

5 La semaine suivante

Intégration sur un segment. Intégration et dérivation. Séries numériques.