MPSI - Programme de colles - Semaine 27 (du 09/05/2022 au 13/05/2022)

1 Séries numériques.

Tout le programme précédent sur le chapitre 29. Les **questions de cours** au programme sont les suivantes :

Condition nécessaire de convergence d'une série (divergence grossière) (Chap 29, Proposition 9). **Critère de convergence des séries de Riemann** (Chap 29, Théorème 20). **La convergence absolue implique la convergence** (Chap 29, Théorème 22) **Critère spécial des séries alternées** (Chap 29, Théorème 24).

2 Groupe symétrique.

- Groupe des permutations de $[\![1\,;n]\!]$, notation S_n. Cycles, notation $(a_1, a_2, \dots, a_n)$. Transpositions.
- Décomposition d'une permutation en produit de cycles à supports disjoints : existence et unicité (démonstration admise). Commutativité de la décomposition. Décomposition d'une permutation en produit de transpositions.
- Signature d'une permutation (existence de l'application signature admise). Signature d'un produit de transpositions, d'un cycle. Permutations paires, impaires.

3 Déterminant.

- Formes p-linéaires, p-linéaires symétriques, antisymétriques, alternées, sur un espace vectoriel de dimension finie n. Effet d'une permutation sur une forme p-linéaire symétrique/antisymétrique. Équivalence entre être antisymétrique et être alternée.

  QC : Image d'une famille liée de p vecteurs par une forme p-linéaire alternée (Chap 31, Proposition 6).

- Déterminant d'une famille de n vecteurs dans une base $\mathscr{E}$ de E de dimension n, notation $\det_{\mathscr{E}}$. Par défintion, c'est l'unique forme n-linéaire alternée f sur E qui vérifie $f(\mathscr{E}) = 1$. Existence et unicité (existence admise). Expression de $\det_{\mathscr{E}}(x_1, \dots, x_n)$ en fonction des coordonnées des vecteurs $x_1, \dots, x_n$ dans la base $\mathscr{E}$. Pour toute forme n-linéaire alternée f sur E, on a $f = f(\mathscr{E})\det_{\mathscr{E}}$. Le déterminant $\det_{\mathscr{E}}$ engendre l'espace vectoriel des formes n-linéaires alternées sur E. Interprétation du déterminant comme aire orientée (resp. volume orienté) d'un parallélogramme de $\mathbb{R}^2$ (resp. d'un parallélépipède dans $\mathbb{R}^3$).
- Déterminant et changement de base. Orientation d'un espace vectoriel réel de dimension finie.

  QC : Caractérisation des bases par le déterminant (Chap 31, Théorème 13).

- Déterminant d'un endomorphisme. Déterminant d'une composée, relation $\det(\lambda u) = \lambda^n \det(u)$.
- Déterminant d'une matrice carrée. Déterminant d'un produit. Relation $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$. Caractérisation des matrices inversibles. Déterminant d'une transposée.
- Déterminant d'une matrice triangulaire.
- Effet des opérations élémentaires sur le déterminant. Mineurs, cofacteurs. Développement d'un déterminant par rapport à une ligne ou une colonne. Déterminant de Vandermonde.

  QC : Déterminant de Vandermonde (Chap 31, Théorème 40).

- Comatrice, notation $\mathrm{Com}(A)$. Inverse d'une matrice inversible.

  QC : Relation $A\mathrm{Com}(A)^\top = \mathrm{Com}(A)^\top A = \det(A)I_n$ (Chap 31, Théorème 42).

4 La semaine suivante

Groupe symétrique. Déterminant. Espaces préhilbertiens réels (début).